МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

С.А. Ус

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

Методичні рекомендації

до виконання лабораторних робіт з дисципліни
“Теорія прийняття рішень”
студентами напряму підготовки
6.040303 Системний аналіз

Дніпропетровськ
2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра системного аналізу й управління

С. А. Ус

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

Методичні рекомендації

**до виконання лабораторних робіт з дисципліни
“Теорія прийняття рішень”
студентами напряму підготовки
6.040303 Системний аналіз**

Дніпропетровськ
НГУ
2014

Ус С.А.

Прийняття рішень в умовах ризику. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія прийняття рішень» студентами напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз / С.А. Ус; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2014. – 35 с.

Автор:

С.А. Ус, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено методичною комісією напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз (протокол № 7 від 26.12.13) за поданням кафедри системного аналізу й управління (протокол № 7 від 26.12.13).

Методичні рекомендації мають на меті допомогти студентам у виконанні лабораторних робіт і в підготовці до модульного контролю за результатами вивчення нормативної дисципліни «Теорія прийняття рішень».

Розглянуто основні теоретичні відомості, необхідні для дослідження ситуацій прийняття рішень. Подано рекомендації до розв’язування типових розрахункових задач.

Сформульовано вимоги до оформлення звіту про лабораторну работу, питання для самоконтролю й критерії оцінювання лабораторних робіт. Рекомендації орієнтовано на активізацію виконавчого етапу навчальної діяльності студентів.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри системного аналізу й управління, д-р техн. наук, проф. В.В. Слєсарєв.

ЗМІСТ

Вступ

Теорія прийняття рішень є одним з найважливіших розділів *системного аналізу*, який вміщує сукупність методів, заснованих на використанні комп'ютерних інформаційних технологій і орієнтований на дослідження складних систем – технічних, економічних, соціальних, екологічних, програмних тощо. Результатом таких досліджень, як правило, є вибір певної альтернативи: варіанта плану розвитку фірми або корпорації, параметрів конструкції, стратегії управління проектом.

Прийняття рішень – це творче, відповідальне управлінське завдання. Його успішна реалізація полягає в тому, щоб відповідно до обставин визначити алгоритм подальших дій у конкретній сфері управління (виробництва товару чи надання послуг), окреслити функції структурних підрозділів у системі діяльності, порядок їх взаємодії та матеріального й інформаційного забезпечення. При цьому рішення часто доводиться приймати беручи до уваги неповноту інформації, зокрема, коли зовнішні обставини або поведінку середовища відомо із певною вірогідністю, тобто в *умовах ризику*.

Дисципліну «Теорія прийняття рішень» вивчають студенти напряму підготовки 6.040303 «Системний аналіз» на четвертому курсі. Мета методичних рекомендацій – забезпечити ефективність самостійної роботи студентів під час виконання лабораторних робіт і підготовки до модульного контролю.

Це видання включає необхідний теоретичний матеріал, опис послідовності й методики виконання двох лабораторних робіт в межах теми «Прийняття рішень в умовах ризику» курсу «Теорія прийняття рішень». У ньому наведено приклади виконання завдань згідно з тематикою кожної лабораторної роботи, контрольні питання, зміст звіту й варіанти індивідуальних завдань.

Необхідні в лабораторних роботах розрахунки виконуються засобами програми Microsoft Excel або за допомогою програм, що самостійно написані студентом у середовищі Matlab 6.1.

При оцінюванні лабораторної роботи враховується самостійність і своєчасність її виконання студентом, рівень оволодіння теоретичним і практичним матеріалом, правильність розрахунків та своєчасне оформлення й подання звіту.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Тема роботи: прийняття рішень в умовах ризику.

Мета роботи: вивчення критеріїв прийняття рішень в умовах ризику.

Порядок виконання роботи

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Сформулювати задачу, яка моделюється на основі першої інформаційної ситуації (I_1). При цьому необхідно визначити:
– множину станів середовища;
– множину можливих рішень органу управління;
– функціонал, який оцінює якість рішення у певній ситуації;
– апріорний розподіл імовірності на множині станів середовища.
3. Знайти раціональне рішення, використовуючи критерії, відповідні інформаційній ситуації I_1.
4. Порівняти результати, отримані за допомогою різних критеріїв. Результати оформити у вигляді такої таблиці:

Назва критерію	Оптимальне рішення	Пояснення до результату

4. Оформити звіт про виконання роботи, який повинен містити такі елементи:
– постановку індивідуального завдання;
– розрахунки за всіма критеріями;
– результати прийняття рішень (за кожним із критеріїв);
– аналіз результатів.

Теоретичні відомості

Досліджуючи статичні моделі прийняття рішень, будемо виходити із схеми, у якій передбачено такі припущення:

1) орган управління має в наявності множину взаємовиключних рішень: $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_m\}$, одне з яких необхідно вибрати;

2) середовище C описується множиною взаємовиключних станів: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, ...\theta_n\}$, і може перебувати в одному з них, однак у якому саме стані воно перебуває (або буде перебувати), органу управління невідомо;

3) визначено оцінний функціонал: $F = \{f_{j,k}\}$, який характеризує «виграш» або «програш» органу управління при виборі ним рішення $\varphi_k \in \Phi$, якщо середовище буде перебувати (або перебуває) в стані $\theta_j \in \Theta$.

Виходячи з цих припущень, процесс прийняття рішень в умовах невизначеності може бути описаний такою схемою:

1. Формування множини можливих рішень органу управління: $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_m\}$, і множини станів середовища: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, ...\theta_n\}$;
2. Визначення та задання основних показників ефективності й корисності, які входять у розрахунок оцінного функціонала: $F = \{f_{j,k}\}$;
3. Визначення органом управління інформаційної ситуації, яка описує стратегію поведінки середовища *C*;
4. Вибір критерію прийняття рішень із множини критеріїв, які характеризують визначену органом управління інформаційну ситуацію;
5. Прийняття оптимального, за вибраним критерієм, рішення або його корекція.

Уведемо необхідні визначення.

Під *ситуацією прийняття рішень* будемо розуміти трійку $\{\Phi, \Theta, F\}$, у якій $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_m\}$ – множина можливих рішень органу управління; $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, ...\theta_n\}$ – множина можливих станів середовища; $F = \{f_{j,k}\}$ – оцінний функціонал, де $f_{j,k} = f(\theta_j, \varphi_k)$.

У розгорнутій формі ситуація прийняття рішень характеризується такою матрицею:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_k & \cdots & \varphi_m \\
\theta_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1k} & \cdots & f_{1m} \\
\theta_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2k} & \cdots & f_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta_j & f_{j1} & f_{j2} & \cdots & f_{jk} & \cdots & f_{jm} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nk} & \cdots & f_{nm}
\end{array}$$

З категорією оцінного функціонала тісно пов’язані такі поняття як ефективність, корисність, втрати, ризик і под. При цьому вибір тієї чи іншої форми функціонала залежить від конкретних задач управління. Зазвичай використовують дві його форми: ті, що визначають корисність, або ті, що визначають втрати.

Якщо орган управління, приймаючи рішення, виходить із необхідності досягнення максимуму оцінного функціонала (тобто він визначає ефективність, корисність, прибуток), то говорять, що він має *додатний інгредієнт*. У цьому випадку оцінний функціонал позначають у такий спосіб: $F = F^+ = \{f_{j,k}^+\}$.

Коли орган управління виходить із потреби досягнення мінімуму оцінного функціонала (тобто він відображає втрати, ризик), то це означає, що він має від’ємний інгредієнт, тоді записують, що $F = F^{-} = \left\{ f_{j,k}^{-} \right\}$.

Інформаційною ситуацією прийняття рішень будемо називати ступінь градації невизначенності у виборі середовищем своїх станів із заданої множини Θ в момент прийняття рішення органом управління.

Критерієм прийняття рішень будемо називати алгоритм, визначений для кожної ситуації прийняття рішень та інформаційної ситуації *I*, який дозволяє обрати єдине оптимальне рішення φ_0 з множини Φ або встановити множину таких рішень, які називають *еквівалентними* за даним критерієм.

У кожній інформаційній ситуації *I* можливе застосування кількох критеріїв. Вибір конкретного з них виконує орган прийняття рішень.

Перша інформаційна ситуація I_1 характеризується заданим розподілом апріорних імовірностей на елементах множини Θ, а саме: $p = (p_1, p_2 \dots p_n)$, тут $p_j = p(\theta = \theta_j)$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Опишемо критерії прийняття рішень у ситуації I_1.

1. *Критерій Байєса* (середнього значення). Сенс цього критерію полягає в максимізації математичного сподівання оцінного функціонала.

Згідно з критерієм Байєса, оптимальними рішеннями $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (або множиною таких рішень) вважають такі, для яких математичне сподівання оцінного функціонала набуває найбільшого (або найменшого) можливого значення, а саме:

$$\varphi_{k_0} : B^{+}(\varphi_{k_0}, p) = \max_{\varphi_k \in \Phi} \mathbf{B}^{+}(\varphi_k, p), \quad k = 1,m, \quad B^{+}(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^{+} \tag{1.1}$$

для функціонала із додатним інгредієнтом;

$$\varphi_{k_0} : B^{-}(\varphi_{k_0}, p) = \min_{\varphi_k \in \Phi} \mathbf{B}^{-}(\varphi_k, p), \quad k = 1,m, \quad B^{-}(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^{-} \tag{1.2}$$

для функціонала із від’ємним інгредієнтом.

Критерій Байєса є найбільш використовуваним в інформаційній ситуації I_1. Його доцільно застосовувати тоді, коли ситуація повторюється багато разів, оскільки за таких умов максимізується середнє значення корисності (або мінімізується середній ризик).

2. *Критерій мінімуму дисперсії оцінного функціонала.* Для кожного рішення $\varphi_k \in \overline{\Phi}$ знайдемо середнє значення $B^{+}(\varphi_k, p)$ оцінного функціонала й дисперсію σ_k^2 в такому вигляді:

$$B^{+}(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^{+}, \tag{1.3}$$

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{+} - B^{+}(\varphi_k, p))^2 p_i. \tag{1.4}$$

Дисперсія описує розсіювання випадкових значень оцінного функціонала для рішення φ_k відносно його середнього значення $B^{+}(\varphi_k, p)$.

Сутність критерію мінімізації дисперсії оцінного функціонала полягає в тому, щоб знайти рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (або множину рішень $\overline{\Phi}$), для якого буде справедливою така рівність:

$$\sigma^2\left(p, \varphi_{k_0}\right) = \min_{\varphi_k \in \Phi} \sigma_k^2\left(p, \varphi_k\right). \tag{1.5}$$

Основним недоліком цього критерію є те, що дисперсія на рішенні $\varphi_{k_1} \in \Phi$ може виявитися меншою, ніж на рішенні $\varphi_{k_2} \in \Phi$, у той час, коли $B^{+}(\varphi_{k_1}, p) < B^{+}(\varphi_{k_2}, p)$. Інакше кажучи, критерий мінімуму дисперсії з одного боку є допоміжним, а з іншого – його прийняття потребує довизначення й невеликої зміни вигляду дисперсії σ_k^2, наприклад, одним із поданих нижче способів.

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{+} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} B^{+}(\varphi_k, p))^2 p_i \tag{1.6}$$

або

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{+} - \max_{\varphi_s \in \Phi} B^{+}(\varphi_s, p))^2 p_i. \tag{1.7}$$

Якщо оцінний функціонал задано у формі від'ємного інгредієнта, а саме: $F = F^{-} = \left\{ f_{j,k}^{-} \right\}$, то рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ також можна знайти, використовуючи умову (1.5), але тут величину σ_k^2 визначають одним із таких способів:

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{-} - B^{-}(\varphi_k, p))^2 p_i, \tag{1.8}$$

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{-} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} B^{-}(\varphi_k, p))^2 p_i \tag{1.9}$$

або

$$\sigma^2(\varphi_k) = \sum_{i=1}^{n} (f_{ik}^{-} - \min_{\varphi_s \in \Phi} B^{-}(\varphi_s, p))^2 p_i, \tag{1.10}$$

причому $B^{-}(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{ik}^{-}$.

3. *Критерій максимізації ймовірності розподілу оцінного функціонала.* Фіксуємо величину *α*, яка задовольняє таку умову: $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$, причому $\alpha_1 = \min_i \min_k f_{ik}^+$ і $\alpha_2 = \max_i \max_k f_{ik}^+$.

Для кожного рішення $\varphi_k \in \Phi$ визначають імовірність $p(f_{ik}^+ \ge \alpha)$ того, що значення оцінного функціонала буде не меншим за величину *α*, коли обрано рішення φ_k.

Сенс критерію максимізації ймовірності розподілу оцінного функціонала полягає у виборі рішення $\varphi_{k_0} \in \Phi$ (або множини рішень $\overline{\Phi}$), для якого ця ймовірність буде максимальною, тобто

$$\varphi_{k_0} : p(f_{jk_0}^+ \ge \alpha) = \max_{\varphi_k \in \Phi} p(f_{jk}^+ \ge \alpha). \qquad (1.11)$$

При використанні цього критерію орган управління виходить із необхідності прийняття конкретного рівня величини *α* й оптимальними вважаються ті рішення, для яких виконується умова (1.11).

Коли значення ймовірності *α* й рішення φ_k фіксовані, то нерівність: $f_{ik}^+ \ge \alpha$, визначає множину станів середовища θ_α, а ймовірність: $p(f_{jk}^+ \ge \alpha)$, обчислюється в такий спосіб:

$$p(f_{jk}^+ \ge \alpha) = \sum_{\theta \in \theta_\alpha} p(f_{ik}^+ \ge \alpha),\ \theta_\alpha = \{\theta_i : f_{ik}{}^+ \ge \alpha\}. \qquad (1.12)$$

Якщо оцінний функціонал має від'ємний інгредієнт F^-, то відповідно необхідно визначити ймовірність $p(f_{ik}^- \le \alpha)$, і критерій набуває такого вигляду:

$$p(f_{jk_0}^- \le \alpha) = \max_{\varphi_k \in \Phi} p(f_{jk}^- \le \alpha), \qquad (1.13)$$

тут $p(f_{jk}^- \le \alpha) = \sum_{\theta \in \theta_\alpha} p(f_{ik}^- \le \alpha), \theta_\alpha = \{\theta_i : f_{ik}{}^- \le \alpha\}$.

4. *Модальный критерій.* Зміст цього критерію полягає у визначенні найбільш імовірного стану середовища, тобто

$$\theta_{j*} : p(\theta_{j*}) = \max_j p(\theta j). \qquad (1.14)$$

Після цього обирають рішення φ_0, для якого $f_{j0}^+ = \max_k f_{j*k}^+$, коли функціонал має додатний інгредієнт, або $f_{j0}^- = \min_k f_{j*k}^-$, коли функціонал характеризується від'ємним інгредієнтом.

5. *Модифікований критерій.* Являє собою комбінацію критеріїв Байєса та мінімуму дисперсії, враховуючи природне бажання органу управління забезпечити найкраще середнє значення (критерій Байєса) та мінімальну дисперсію. Його обчислюють у такий спосіб:

$$k(\varphi_k, p) = (1-\lambda)\left(B^+(\varphi_k, p)\right)^2 - \lambda\sigma^2(\varphi_k, p). \quad (1.15)$$

Найкращим вважають рішення φ_0, для якого виконано таку умову:

$$k(\varphi_0(p) = \max_k k(\varphi_k, p).$$

При цьому значення коефіцієнта λ встановлюють з огляду на те, якому саме критерію (Байєса чи мінімуму дисперсії) потрібно надати більшу перевагу, а також щоб було виконано нерівність: $0 \le \lambda \le 1$. Коли $\lambda = 0$, то цей критерій збігається із критерієм Байєса, а коли $\lambda = 1$ – із критерієм мінімуму дисперсії.

6. *Критерій мінімальної ентропії математичного сподівання оцінного функціонала*. Тут передбачено, що для кожного з можливих рішень належить обчислити ентропію математичного сподівання оцінного функціонала за такою формулою:

$$H(p, \varphi_k) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i f_{ik}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+}\right) \cdot \ln\left(\frac{p_i f_{ik}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+}\right). \quad (1.16)$$

Оптимальним вважається рішення φ_0, яке має мінімальну ентропію, тобто

$$\varphi_0 : H(p, \varphi_0) = \min_k H(p, \varphi_k).$$

7. *Умовні рішення*. Припустимо, що в ситуації прийняття рішень I можна застосовувати критерії з деякої множини: $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Один із них вважають головним, а для інших критеріїв задають обмеження такого вигляду: $c_i \le k_i \le c_i, i = 1, n$.

У такому разі рішення, прийняте органом управління за головним критерієм, називають *умовним*.

І тут належить взяти до уваги такі міркування:

1) оскільки пошук оптимальних рішень за таких умов зводиться до перебору варіантів, то обмеження у вигляді рівностей не завжди можна застосувати, бо вони можуть спричинити відсутність рішень (задача взагалі не буде мати жодного допустимого розв’язку);

2) умовне рішення можна обрати і без головного критерію, тоді воно буде являти собою розв'язок такої системи нерівностей:

$$c_i \le k_i \le c_i, i = 1, n .$$

Приклад розв'язування задачі

Завдання: сформулювати задачу, що моделюється першою информаційною ситуацією, вибрати раціональне рішення, застосовуючи різні критерії та виконати аналіз результатів.

Сформулюємо задачу таким чином: бригада монтерів енергомережі включає 5 робітників, що виконують ремонтно-відновлювальні роботи в разі настання аварійних ситуацій. Керівництву необхідно прийняти рішення про зміну кількості робітників. При цьому можливі такі варіанти:

φ_1 – не змінювати кількість робітників;

φ_2 – збільшити кількість робітників за рахунок комбінування змін (бригада буде мати змінний склад);

φ_3 – збільшити кількість робітників;

φ_4 – зменшити кількість робітників.

Можливі ситуації:

θ_1 – середня кількість аварій протягом доби буде великою (суттєво збільшиться);

θ_2 – середня кількість аварій протягом доби буде помірно великою (несуттєво збільшиться);

θ_3 – за добу буде траплятися небагато аварій (їх кількість не зміниться);

θ_4 – протягом доби буде траплятися мало аварій (їх число зменшиться);

θ_5 – аварій не буде.

За оцінками експертів імовірність кожної ситуації та ефективність прийнятих при цьому рішень можна описати таким чином:

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,2	θ_1	3	4	7	0
0,4	θ_2	5	5	6	1
0,2	θ_3	8	2	2	6
0,1	θ_4	3	1	0	7
0,1	θ_5	1	0	0	9

Необхідно вибрати оптимальне рішення.

Розв'яжемо задачу, використовуючи критерії першої інформаційної ситуації.

Критерий Байєса

Оскільки в нашій задачі для оцінювання можливих рішень використовується функціонал із додатним інгредієнтом (він описує ефективність рішень), то будемо використовувати формули (1.1).

Обчислимо байєсові значення для кожного з цих рішень, а саме:

$$B^{+}(\varphi_1, p) = \sum_{i=1}^{5} f_{i1} p_i = 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,1 = 4,6.$$

$$B^{+}(\varphi_2, p) = \sum_{i=1}^{5} f_{i2} p_i = 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 = 3,3.$$

$$B^{+}(\varphi_3, p) = \sum_{i=1}^{5} f_{i1} p_i = 7 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 = 4,2.$$

$$B^{+}(\varphi_4, p) = \sum_{i=1}^{5} f_{i1} p_i = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0.2 + 7 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 = 3,2.$$

Легко помітити, що найбільше байєсове значення має рішення φ_1, тому його вибір можна вважати раціональним, тобто потрібно залишити кількість робітників незмінною.

Критерій мінімуму дисперсії оцінного функціонала

За формулою (1.4) обчислимо значення дисперсій для кожного із можливих рішень, тобто

$$\sigma_1^2(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{5} (f_{i1} - 4,6)^2 p_i = 2,56 \cdot 0,2 + 0,16 \cdot 0,4 + 11,56 \cdot 0,2 + 2,56 \cdot 0,1 +$$
$$+12,96 \cdot 0,1 = 4,44.$$

$$\sigma_2^2(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{5} (f_{i2} - 3,3)^2 p_i = 0,49 \cdot 0,2 + 2,89 \cdot 0,4 + 1,69 \cdot 0,2 + 5,29 \cdot 0,1 +$$
$$+10,89 \cdot 0,1 = 3,21.$$

$$\sigma_3^2(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{5} (f_{i3} - 4,2)^2 p_i = 7,84 \cdot 0,2 + 3,24 \cdot 0,4 + 4,84 \cdot 0,2 + 17,64 \cdot 0,1 +$$
$$+17,64 \cdot 0,1 = 7,36.$$

$$\sigma_4^2(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{5} (f_{i4} - 3,2)^2 p_i = 10,24 \cdot 0,2 + 4,84 \cdot 0,4 + 7,84 \cdot 0,2 + 14,44 \cdot 0,1 +$$
$$+33,64 \cdot 0,1 = 10,36.$$

Найменше значення дисперсії має рішення φ_2, яке передбачає збільшення кількості робітників за рахунок комбінування змін, тому його вибір за цим критерієм буде раціональним.

Розглянемо модифікації цього методу.

Перша описується формулою (1.6). Обчислимо спочатку середнє байєсове значення за всіма критеріями, а саме:

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} B^{+}(\varphi_j, p) = 3{,}825.$$

Тепер обчислимо значення дисперсій відносно нього, тобто

$$\sigma_1^2(\varphi_1, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i1} - 3{,}825)^2 p_i = 0{,}68\cdot 0{,}2 + 1{,}38\cdot 0{,}4 + 17{,}43\cdot 0{,}2 + 0{,}68\cdot 0{,}1 +$$
$$+7{,}98\cdot 0{,}1 = 5{,}04.$$

$$\sigma_2^2(\varphi_2, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i2} - 3{,}85)^2 p_i = 0{,}03\cdot 0{,}2 + 1{,}38\cdot 0{,}4 + 3{,}33\cdot 0{,}2 + 7{,}98\cdot 0{,}1 +$$
$$+14{,}63\cdot 0{,}1 = 3{,}48.$$

$$\sigma_3^2(\varphi_3, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i3} - 3{,}85)^2 p_i = 10{,}08\cdot 0{,}2 + 4{,}73\cdot 0{,}4 + 3{,}33\cdot 0{,}2 + 14{,}63\cdot 0{,}1 +$$
$$+14{,}63\cdot 0{,}1 = 7{,}5.$$

$$\sigma_4^2(\varphi_4, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i4} - 3{,}85)^2 p_i = 14{,}63\cdot 0{,}2 + 7{,}98\cdot 0{,}4 + 4{,}73\cdot 0{,}2 + 10{,}08\cdot 0{,}1 +$$
$$+26{,}78\cdot 0{,}1 = 10{,}75.$$

Вочевидь, мінімальне значення дисперсії отримано для рішення φ_2, тому його вибір можна вважати раціональним.

Друга модіфікація описується формулою (1.7). Максимальне байєсове значення: $\max\limits_{j} B^{+}(\varphi_j, p) = 4{,}6$. Оцінимо відхилення значень оцінного функціоналу від нього для кожного з рішень, а саме:

$$\sigma_1^2(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i1} - 4{,}6)^2 p_i = 2{,}56\cdot 0{,}2 + 0{,}16\cdot 0{,}4 + 11{,}56\cdot 0{,}2 + 2{,}56\cdot 0{,}1 +$$
$$+12{,}96\cdot 0{,}1 = 4{,}44.$$

$$\sigma_2^2(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{5}(f_{i2} - 4{,}6)^2 p_i = 0{,}36\cdot 0{,}2 + 0{,}16\cdot 0{,}4 + 6{,}76\cdot 0{,}2 + 12{,}96\cdot 0{,}1 +$$
$$+21{,}16\cdot 0{,}1 = 4{,}9.$$

$$\sigma_3^2(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{5} (f_{i3} - 4{,}6)^2 p_i = 5{,}76 \cdot 0{,}2 + 1{,}96 \cdot 0{,}4 + 6{,}76 \cdot 0{,}2 + 21{,}16 \cdot 0{,}1 +$$

$$+21{,}16 \cdot 0{,}1 = 7{,}52.$$

$$\sigma_4^2(\varphi_k, p) = \sum_{i=1}^{5} (f_{i4} - 4{,}6)^2 p_i = 21{,}16 \cdot 0{,}2 + 12{,}96 \cdot 0{,}4 + 1{,}96 \cdot 0{,}2 + 5{,}76 \cdot 0{,}1 +$$

$$+19{,}36 \cdot 0{,}1 = 12{,}32.$$

Мінімальне значення модифікованої дисперсії відповідає рішенню φ_1, тому його вибір можна вважати раціональним.

Тепер розв'яжемо задачу за допомогою критерію *максимізації ймовірності розподілу* оцінного функціонала. Обчислимо необхідні параметри: $\alpha_1 = \min_i \min_j f_{ij}$ та $\alpha_2 = \max_i \max_j f_{ij}$, за нашими даними $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = 9$. Тепер оберемо число α, яке задовольняє таку умову: $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$. Припустимо, що $\alpha = 5$. За формулами (1.12) обчислимо ймовірності $p(f_k^+ \ge \alpha)$ для кожного рішення φ_k, тобто

φ_1: $p(f_1^+ \ge 5) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$.

φ_2: $p(f_2^+ \ge 5) = 0{,}4$.

φ_3: $p(f_3^+ \ge 5) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.

φ_4: $p(f_4^+ \ge 5) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}4$.

Максимальне значення ймовірності мають дві альтернативи: φ_1 та φ_3, тобто раціональними за цим критерієм можна вважати такі рішення: не змінювати кількості робітників або збільшити її.

Застосуємо тепер для розв'язування задачі *модальний критерій*.

Із цією метою визначимо стан середовища, який має найбільшу ймовірність, стосовно сформульованої задачі це буде стан θ_2 – «середня кількість аварій протягом доби буде помірно великою (несуттєво збільшиться)». Оцінки рішень стосовно цього стану мають такі значення: $f_{21}^+ = 5$, $f_{22}^+ = 5$, $f_{23}^+ = 6$, $f_{24}^+ = 1$.

Найбільше з них відповідає рішенню φ_3, тому його вибір можна вважати раціональним, тобто необхідно збільшити кількість робітників.

Розглянемо ще кілька критеріїв, які можна застосовувати в цій ситуації.

Критерій мінімальної ентропії математичного сподівання оцінного функціонала. Стосовно кожного з можливих рішень обчислимо ентропію математичного сподівання оцінного функціонала за формулою (1.16).

У нашому випадку

$$H(p,\varphi_1) = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{p_i f_{i1}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j1}^+} \right) \cdot \ln \left(\frac{p_i f_{i1}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j1}^+} \right) \right\} = 1{,}1731 .$$

$$H(p,\varphi_2) = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{p_i f_{i2}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j2}^+} \right) \cdot \ln \left(\frac{p_i f_{i2}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j2}^+} \right) \right\} = 1{,}008 .$$

$$H(p,\varphi_3) = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{p_i f_{i3}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j3}^+} \right) \cdot \ln \left(\frac{p_i f_{i3}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j3}^+} \right) \right\} = 0{,}909 .$$

$$H(p,\varphi_4) = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{p_i f_{i4}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j4}^+} \right) \cdot \ln \left(\frac{p_i f_{i4}^+}{\sum_{j=1}^{n} p_j f_{j4}^+} \right) \right\} = 0{,}96 .$$

Мінімального значення критерій набуває в рішенні φ_3. Таким чином, оптимальним буде вибір альтернативи φ_3, яка передбачає збільшення кількості робітників.

Комбінований критерій. Розглянемо задачу вибору рішення за цим критерієм, використовуючи різні значення параметра λ. Обчислимо граничні значення параметра, за якими відзначають перевагу критеріїв [2], а саме:

$$\lambda^* = \min_k \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+ \right]^2}{\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{jk}^+)^2} = 0{,}497 . \qquad \lambda^{**} = \max_k \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} p_j f_{jk}^+ \right]^2}{\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{jk}^+)^2} = 0{,}827 .$$

Тепер обчислимо значення критерію, коли $\lambda = 0{,}4$ ($\lambda < \lambda^*$), тобто

$k(p,\varphi_1) = 4{,}6^2 \left(1 - 0{,}4\right) - 0{,}4 \cdot 4{,}44 = 10{,}92.$

$k(p,\varphi_2) = 3{,}3^2 \left(1 - 0{,}4\right) - 0{,}4 \cdot 3{,}21 = 5{,}25.$

$k(p,\varphi_3) = 4{,}3^2 \left(1 - 0{,}4\right) - 0{,}4 \cdot 6{,}61 = 7{,}64.$

$k(p,\varphi_4) = 3{,}2^2 \left(1 - 0{,}4\right) - 0{,}4 \cdot 10{,}36 = 2.$

Максимальне значення критерію відповідає рішенню φ_1, тобто, коли $\lambda < \lambda^*$, раціональним вибором можна вважати рішення φ_1.

Тепер розглянемо задачу вибору за умови, що $\lambda = 0{,}9$ ($\lambda > \lambda^{**}$), а саме:

$$k(p,\varphi_1) = -1{,}88; \quad k(p,\varphi_2) = -1{,}8; \quad k(p,\varphi_3) = -4{,}86; \quad k(p,\varphi_4) = -8{,}3.$$

Максимальне значення критерію відповідає альтернативі φ_2, тобто коли $\lambda > \lambda^*$, вибір цього рішення буде раціональним.

У разі, якщо $\lambda = 0{,}662$ ($\lambda^* < \lambda < \lambda^{**}$), критерій набуває таких значень:

$$k(p,\varphi_1) = 4{,}2128; \; k(p,\varphi_2) = 1{,}5558; \; k(p,\varphi_3) = 1{,}09; \; k(p,\varphi_4) = -3{,}3972.$$

Отже, оптимальним буде рішення φ_1.

Запишемо результати, розраховані за допомогою різних критеріїв, у таблицю.

Таблиця 1.1

Результати обчислення та прийняття рішень за різними критеріями в умовах ризику

Назва критерію	Значення критерію стосовно рішень				Опти-мальне рішення
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	
Байєса	4,6	3,3	4,2	3,2	φ_1
Мінімуму дисперсії	4,44	3,21	7,36	10,36	φ_2
Модифікация 1	5,04	3,48	7,5	10,75	φ_2
Модифікация 2	4,44	4,9	7,52	12,32	φ_1
Максимізації ймовірності розподілу оцінного функціоналу	0,6	0,4	0,6	0,4	φ_1, φ_2
Модальний	5	5	6	1	φ_3
Мінімуму ентропії	1,1731	1,008	0,909	0,96	φ_3
Комбінований критерій ($\lambda = 0{,}4$)	10,92	5,25	7,64	2	φ_1
Комбінований критерій ($\lambda = 0{,}9$)	–1,88	–1,8	–4,86	–8,3	φ_2
Комбінований критерій ($\lambda = 0{,}662$)	4,2128	1,5558	1,09	–3,3972	φ_1

Висновки: Використання різних критеріїв дає різні оптимальні альтернативи, а тому перш ніж приймати рішення, необхідно визначити, за яким критерієм воно буде обиратися, враховуючи умови задачі та вимоги до рішення. Наприклад у розглянутій нами задачі, альтернатива φ_4 не буде оптимальною стосовно жодного з критеріїв, альтернатива φ_3 буде оптимальною лише за модальним критерієм, тобто особі, що приймає рішення необхідно вибирати між двома альтернативами: φ_1 – не змінювати кількості робітників; φ_2 – збільшити кількість робітників за рахунок комбінування змін (бригада буде мати змінний склад).

Контрольні питання

1. Що являє собою інформаційна ситуація як основа прийняття рішень?
2. Дайте визначення критерію прийняття рішень.
3. Які елементи описують ситуацію прийняття рішень?
4. У чому полягає відмінність оцінних функціоналів із додатним та від'ємним інгредієнтом?
5. Назвіть етапи процесу прийняття рішень.
6. Які характерні риси властиві ситуації прийняття рішень в умовах ризику?
7. Охарактеризуйте критерії прийняття рішень, які застосовують в умовах ризику.
8. Коли доцільно застосовувати критерій Байєса?
9. За яких умов належить приймати рішення на основі критерію мінімуму дисперсії? Які особливості його застосування?
10. Коли існує сенс у застосуванні модального критерію?

Варіанти індивідуальних завдань

1.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	1	5	3	0
0,3	θ_2	2	2	2	4
0,5	θ_3	4	2	3	6
0,1	θ_4	0	4	3	1

2.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,2	θ_1	1	5	3	4
0,3	θ_2	3	2	2	4
0,4	θ_3	4	3	3	0
0,1	θ_4	1	4	3	1

3.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	5	4	0	0
0,5	θ_2	1	3	7	4
0,3	θ_3	0	5	2	6
0,1	θ_4	0	2	3	4

4.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	2	3	0	1
0,3	θ_2	3	2	2	4
0,3	θ_3	2	2	4	6
0,3	θ_4	2	4	3	1

5.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,4	θ_1	2	5	3	1
0,3	θ_2	1	3	2	4
0,2	θ_3	4	2	3	5
0,1	θ_4	5	0	3	2

6.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	2	5	3	0
0,3	θ_2	5	0	2	4
0,5	θ_3	4	2	3	6
0,1	θ_4	7	4	3	3

7.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,15	θ_1	1	0	3	1
0,25	θ_2	3	4	2	4
0,1	θ_3	4	2	5	2
0,5	θ_4	1	4	3	1

8.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,2	θ_1	2	3	3	1
0,3	θ_2	2	2	2	4
0,4	θ_3	4	1	6	5
0,1	θ_4	3	4	3	1

9.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	2	4	4	1
0,3	θ_2	2	2	2	4
0,4	θ_3	4	5	2	6
0,2	θ_4	3	4	3	1

10.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,4	θ_1	3	4	3	2
0,1	θ_2	2	2	2	4
0,2	θ_3	4	3	3	8
0,3	θ_4	1	4	5	0

11.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,2	θ_1	2	5	0	0
0,1	θ_2	2	2	2	4
0,5	θ_3	2	0	3	6
0,2	θ_4	2	4	3	1

12.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,4	θ_1	1	7	3	0
0,1	θ_2	2	2	5	4
0,3	θ_3	4	0	3	6
0,2	θ_4	1	4	3	1

13.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,4	θ_1	1	5	3	0
0,2	θ_2	2	4	2	4
0,1	θ_3	4	2	3	6
0,3	θ_4	0	4	3	1

14.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	3	5	3	7
0,2	θ_2	2	3	5	4
0,4	θ_3	4	2	3	6
0,3	θ_4	1	4	3	1

15.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,2	θ_1	1	5	3	2
0,3	θ_2	2	4	2	4
0,1	θ_3	4	2	7	6
0,4	θ_4	0	5	3	1

16.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	1	5	3	0
0,3	θ_2	2	6	2	4
0,5	θ_3	4	2	2	6
0,1	θ_4	0	4	3	1

17.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,1	θ_1	1	5	3	2
0,3	θ_2	2	6	2	4
0,5	θ_3	4	2	2	6
0,1	θ_4	1	4	3	1

18.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,35	θ_1	1	5	3	0
0,15	θ_2	3	2	3	4
0,4	θ_3	4	2	3	6
0,1	θ_4	0	4	3	1

19.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,25	θ_1	1	2	3	0
0,35	θ_2	5	2	2	4
0,2	θ_3	4	4	3	6
0,2	θ_4	0	4	3	1

20.

p		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0,3	θ_1	1	5	3	2
0,4	θ_2	1	3	2	4
0,1	θ_3	4	2	4	6
0,2	θ_4	7	4	3	1

Примітки.

1. Вибір варіанта відбувається за номером прізвища студента в списку академічної групи.

2. За бажанням студент може запропонувати для розв'язування власну задачу, узгодивши її умову із викладачем.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Тема роботи: аналіз якості рішень в умовах ризику.

Мета роботи: вивчення методів синтезу оптимальних рішень в умовах неповної інформації.

Порядок виконання роботи

1. Опрацювати необхідний теоретичний матеріал.
2. Побудувати множини Байєса геометричним методом та методом контрольної точки для варіанта індивідуального завдання.
3. Провести аналіз якості рішення в даній інформаційній ситуації.
4. Оформити звіт про виконання роботи, який повинен містити такі елементи:

– постановку індивідуального завдання;

– отримані множини рішень за критерієм Байєса;

– аналіз результатів.

Теоретичні відомості

Байєсові множини рішень

Критерій Байєса дає можливість в інформаційній ситуації дослідити проблему синтезу під час вибору оптимального рішення відповідно до розподілу ймовірностей: $p = (p_1, ..., p_n)$, на множині станів середовища C. Позначимо через Δ множину можливих значень вектора апріорного розподілу ймовірності, а саме: $\Delta = \left\{ (p_1, ..., p_n) : 0 \le p_j \le 1 (j = 1, ...n), \sum_{i=1}^{n} p_j = 1 \right\}$, і розглянемо такий $(n-1)$-вимірний симплекс P_{n-1}:

$$P_{n-1} = \left\{ (p_1, ..., p_{n-1}) : 0 \le p_j \le 1 (j = 1, ...n-1), \sum_{i=1}^{n-1} p_j \le 1 \right\}. \quad (2.1)$$

Він являє собою проекцію плоскої множини Δ на $(n-1)$-вимірний простір значень перших $(n-1)$-х компонент вектора апріорного розподілу: $p = (p_1, ..., p_n)$.

Суть задачі синтезу полягає в розбитті симплексу P_{n-1} на множини $S_{\varphi_k} \subset P_{n-1}$, $k = 1, \ldots m$, що задовольняють такі умови:

1. $S_{\varphi_i} \bigcap S_{\varphi_k} = \Lambda$, коли $i \ne k$, де Λ – порожня множина.

2. $\bigcup_{k=1}^{m} S_{\varphi_k} = P_{n-1}$.

3. Рішення $\varphi_k \in \Phi$ буде оптимальним за критерієм Байєса, якщо $p \subset S_{\varphi_k}$.

Множину S_{φ_k} будемо називати *байєсовою множиною* значень апріорних імовірностей: $p = (p_1, ..., p_n)$, стосовно рішення S_{φ_k}, рішення $\varphi_k \in \Phi$ для ймовірності $p \subset S_{\varphi_k}$ – *байєсовим* рішенням, а величину $B^+(p,\varphi_k)$ на байєсовому рішенні φ_k – оптимальним байєсовим значенням оцінного функціонала.

Визначимо байєсову поверхню оптимальних байєсових значень оцінного функціонала F^+ (або просто байєсову поверхню) для всіх ймовірностей $p \in \Delta_n$ у такий спосіб:

$$B^+(p) = \max_{\phi_k \in \Phi} B^+(p,\varphi_k)\,. \tag{2.2}$$

Якщо орган прийняття рішень має інформацію про байєсові множини, то він може порівняно просто приймати оптимальні (за критерієм Байєса) рішення, навіть коли апріорний розподіл ймовірностей: $p = (p_1, ..., p_n)$, станів середовища C визначено неточно, але проблема побудови самих Байєсових множин являє собою досить складну математичну задачу розбиття $(n - 1)$-вимірного симплекса на підмножини (особливо, коли $n \geq 4$). Розглянемо методи побудови байєсових множин рішень.

Геометричний метод

Зауважимо, що цей метод може застосовуватись лише тоді, коли кількість станів середовища $n \leq 4$.

У загальному випадку геометричний метод побудови байєсової множини в $(n - 1)$-вимірному просторі значень $p_1 ,..., p_{n-1}$ для обраного рішення $\varphi_k \in \Phi$ опишемо нижче.

Кожна з множин S_{φ_k} буде являти собою множину точок p, які задовольняють таку систему нерівностей:

$$b^+_{\varphi_i\varphi_k}(\overline{p}) \geq 0\,, \quad i = 1,...,m, i \neq k\,, \;\; p_j \geq 0 \quad j = 1,...,n-1,\; \sum_{j=1}^{n-1} p_j \leq 1\,, \tag{2.3}$$

тут

$$b^+_{\varphi_i\varphi_k}(\overline{p}) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j (f^+_{ji} - f^+_{jk}) + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i)(f^+_{ni} - f^+_{nk})\,. \tag{2.4}$$

Отже, ми маємо систему з $(n + m - 1)$ нерівностей. Звідси випливає, що кожна з множин S_{φ_k} являє собою опуклий замкнутий багатогранник в $(n - 1)$-вимірному просторі, який повністю описується своїми вершинами.

Для знаходження вершин необхідно розглянути всілякі комбінації, складені з $(n - 1)$-го рівняння такого вигляду:

$$b^{+}_{\varphi_i\varphi_k}(\overline{p}) = 0\,,\ p_j = 0\,,\ \sum_{j=1}^{n-1} p_j = 1\,. \tag{2.5}$$

Таких комбінацій може бути не більше ніж $C^{\,n-1}_{m+n-1}$. Вершиною множини S_{φ_k} буде будь-яка точка: $\overline{p} = (p_1, ..., p_{n-1})$, що задовольняє систему нерівностей (2.3) і систему з (n – 1)-го рівняння (2.5) з ненульовим визначником. Але цей спосіб не можна вважати раціональним, оскільки число комбінацій досить велике.

Розглянемо задачу побудови байєсових множин для випадку наявності трьох можливих рішень: $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, і двох станів середовища: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, тобто коли $n = 2$ і $m = 3$. Припустимо, що оцінний функціонал задано такою матрицею:

$$\begin{array}{c|cccc} & & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ p & \theta_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 1-p & \theta_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{array}$$

Запишемо байєсові значення функціонала для кожного з рішень, тобто

$B^{+}(p, \varphi_1) = p f_{11} + (1-p) f_{21}$,

$B^{+}(\rho, \varphi_2) = p f_{12} + (1-p) f_{22}$,

$B^{+}(\rho, \varphi_3) = p f_{13} + (1-p) f_{23}$.

Байєсову поверхню визначаємо за такою формулою:

$$B^{+}(p) = \max_{\phi_k \in \Phi} B^{+}(p, \varphi_k)\,,$$

а межі множин – точками, у яких проходить зміна лінії поверхні. Вони є точками перетину відповідних байєсових значень, а саме:

$\Gamma_{\varphi_1\varphi_2}$: $\mathrm{B}^{+}(p, \varphi_1) = \mathrm{B}^{+}(p, \varphi_2)$,

$\Gamma_{\varphi_1\varphi_3}$: $\mathrm{B}^{+}(p, \varphi_1) = \mathrm{B}^{+}(p, \varphi_3)$,

$\Gamma_{\varphi_2\varphi_3}$: $\mathrm{B}^{+}(p, \varphi_2) = \mathrm{B}^{+}(p, \varphi_3)$,

тут $\Gamma_{\varphi_i\varphi_j}$ – границя між множинами S_{φ_i} та S_{φ_j}.

Розглянемо приклад з числовими значеннями. Припустимо, що оцінний функціонал задано таким чином:

$$\begin{array}{cccc} & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \theta_1 & 10 & 2 & 5 \\ \theta_2 & -3 & 7 & 4 \end{array}$$

Тоді байєсові значення для кожного рішення набувають такого вигляду:

$$B^{+}(p,\varphi_1)=10p+(-3)(1-p)=10p-3+3p=13p-3,$$

$$B^{+}(p,\varphi_2)=2p+7(1-p)=2p+7-7p=-5\rho+7,$$

$$B^{+}(p,\varphi_3)=5p+4(1-p)=5p+4-4p=p+4.$$

Побудуємо на координатній площині графіки цих функцій (див. рис. 2.1). Товстою лінією на рисунку позначено байєсову поверхню.

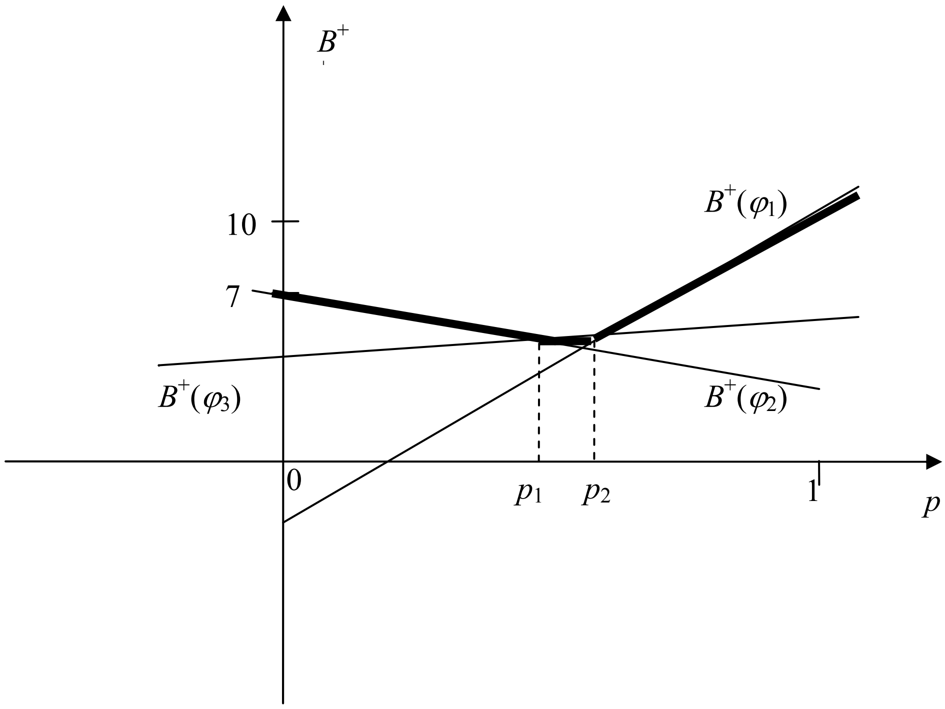

Рис. 2.1. Графічне зображення байєсової поверхні та байєсових множин

Очевидно, що

$$B^{+}(p)=\begin{cases} \mathrm{B}^{+}(p,\varphi_1), \ 0\le p\le p_1, \\ \mathrm{B}^{+}(p,\varphi_3), \ p_1\le p\le p_2, \\ \mathrm{B}^{+}(p,\varphi_2), \ p_2\le p\le 1. \end{cases}$$

Байєсові множини відповідно будуть мати такий вигляд: $S_{\varphi_1} = [0, p_1]$, $S_{\varphi_2} = [p_2, 1]$, $S_{\varphi_3} = [p_1, p_2]$. Для обчислення значень імовірностей p_1 і p_2 складемо такі рівняння:

$$p_1: \ B^+(p, \varphi_2) = B^+(p, \varphi_3), \qquad p_2: \ B^+(p, \varphi_3) = B^+(p, \varphi_1),$$

$$-5p + 7 = p + 4, \qquad 13p - 3 = p + 4,$$

$$-6p = -3, \qquad 12p = 7,$$

$$p_1 = \frac{1}{2}. \qquad p_2 = \frac{7}{12}.$$

Отже, остаточно байєсові множини набувають такого вигляду:

$$S_{\varphi_2} = \left[0; \frac{1}{2}\right], \quad S_{\varphi_3} = \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{12}\right], \quad S_{\varphi_1} = \left[\frac{7}{12}; 1\right].$$

Функціональний метод побудови байєсових множин

Побудова байєсових множин для випадку наявності декількох рішень може здійснюватися або шляхом спільного розгляду всіх можливих пар рішень, або за допомогою послідовного переходу від двох рішень до трьох, від трьох до чотирьох і т. д. З огляду на це, існує прямий метод розв'язування задачі побудови байєсових множин і багатокроковий метод послідовного збільшення числа рішень.

Прямий метод побудови байєсових множин за умови існування кількох можливих рішень передбачає описану нижче послідовність дій.

Для вихідної множини рішень: $\Phi = \{\varphi_{1,\dots,}\varphi_m\}$, необхідно скласти такі пари рішень:

(φ_1, φ_2), (φ_1, φ_3), (φ_1, φ_4), …, (φ_1, φ_m) – усього (m – 1) пара,

(φ_2, φ_3), (φ_2, φ_4), …, (φ_2, φ_m) – усього (m – 2) пари,

(φ_1, φ_4), …, (φ_1, φ_m) – усього (m – 3) пари,

……………………………………………………….

$(\varphi_{m-1}, \varphi_m)$ – 1 пара,

а для кожної з пар (φ_i, φ_k) розбити симплекс P_{n-1} на дві відповідні байєсові множини.

Позначимо через $S_{\varphi_k|\varphi_i}$ байєсову множину рішень $\varphi_k \in \Phi$ у групі тільки двох рішень (φ_i, φ_k), тоді

$$S_{\varphi_1} = \bigcap_{i=2}^{m} S_{\varphi_1|\varphi_i} .$$

Для частини симплексу $P_{n\text{-}1} \setminus S_{\varphi_1}$ байєсову множину S_{φ_2} можна визначити таким чином:

$$S_{\varphi_2} = (P_{n-1} \setminus S_{\varphi_1}) \bigcap_{i=3}^{m} S_{\varphi_2|\varphi_i} .$$

Після цього розглянемо частину симплексу $[P_{n-1} \setminus (S_{\varphi_1} \bigcup S_{\varphi_2})]$, для якого байєсову множину S_{φ_3} визначаємо за такою формулою:

$$S_{\varphi_3} = [(P_{n-1} \setminus S_{\varphi_1} \bigcup S_{\varphi_2})] \bigcap_{i=4}^{m} S_{\varphi_3|\varphi_i} .$$

Продовживши процес, далі аналогічним чином встановимо, що

$$S_{\varphi_k} = [(P_{n-1} \setminus \bigcup_{s=1}^{k-1} S_{\varphi_s})] \bigcap_{i=k+1}^{m} S_{\varphi_k|\varphi_i} .$$

Метод варіації контрольної точки для побудови баєсових рішень

Припустимо, що вибрано деяку ймовірність: $p^0 = (p_1^0, ..., p_n^0)$, $p^0 \in P_{n-1}$ (контрольну точку).

Опишемо схему методу.

1. Знайдемо байєсові значення оцінного функціонала стосовно рішеннь $\varphi_k \in \Phi$, коли $p = p^0$, а саме:

$$B^+(p^0, \varphi_k) = \sum_{j=1}^{n} p_j^0 f_{jk}^+ , \ k = 1, 2, \ldots m .$$

2. Визначимо рішення $\varphi_{k0} \in \Phi$, для якого виконано таку умову:

$$B^+(p^0) = B^+(p^0, \varphi_{k_0}) = \max_{\phi_k \in \Phi} B^+(p^0, \varphi_k) .$$

3. Обчислимо значення: $\delta_{k_0 k} = B^+(p^0, \varphi_{k_0}) - B^+(p^0, \varphi_k)$, для всіх рішень $\varphi_k \in \Phi \setminus \varphi_{k_0}$.

4. Обчислимо вектори d_{kk_0}, як різницю між k-м та k_0-м стовпцями оцінного функціонала F^+ за таким правилом:

$$d_{kk_0} = \begin{pmatrix} f_{1k}^{+} \\ \dots \\ f_{nk}^{+} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_{1k_0}^{+} \\ \dots \\ f_{nk_0}^{+} \end{pmatrix}.$$

5. Розглянемо варіацію: $\overline{p} = (\overline{p}_1, ..., \overline{p}_n)$, вихідної контрольної точки p^0, побудовану за таким правилом:

$$\overline{p} = p^0 + q\,, \text{ де } \overline{p}_j = p_j + q_j\,, \quad \sum_{j=1}^{n} \overline{p}_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j^0 = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 0.$$

Для кожної пари рішень $(\varphi_{k_0}, \varphi_k)$ знайдемо скалярний добуток (q, d_{kk_0}), а саме: $(q, d_{kk_0}) = \sum_{j=1}^{n} q_j d_{kk_0}^{j}$. Границю, яка розділяє умовні байєсові множини $S_{\varphi_{k_0}|\varphi_k}$ і $S_{\varphi_k|\varphi_{k_0}}$, визначають шляхом розрахунку $(n - 1)$ варіаційних точок $\overline{p}^1, ..., \overline{p}^{n-1}$ на основі розв'язування $(n - 1)$-ї системи лінійних алгебраїчних рівнянь, за якими знаходять вектори $q^1, ..., q^{n-1}$, а саме:

$$\begin{cases} (q, d_{kk_0}) = \delta_{kk_0}, \\ q_i = 0, \qquad\qquad i = 1, 2, \dots n-1\,. \\ \sum_{l=1}^{n} q_l = 0. \end{cases}$$

6. Рівняння гіперплощини $\Gamma_{\varphi_{k_0}\varphi_k}$, що є границею множин $S_{\varphi_{k_0}|\varphi_k}$ та $S_{\varphi_k|\varphi_{k_0}}$ і проходить через такі точки: $\overline{p}^1 = (\overline{p}_1^1, ..., \overline{p}_{n-1}^1)$, … $\overline{p}^{n-1} = (\overline{p}_1^{\,n-1}, ..., \overline{p}_{n-1}^{\,n-1})$, отримують таким чином:

$$\begin{vmatrix} p_1 - \overline{p}_1^1, & p_2 - \overline{p}_2^1, & \dots & p_{n-1} - \overline{p}_{n-1}^1 \\ \overline{p}_1^2 - \overline{p}_1^1, & \overline{p}_2^2 - \overline{p}_2^1, & \dots & \overline{p}_{n-1}^2 - \overline{p}_{n-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \\ \overline{p}_1^{n-1} - \overline{p}_1^1, & \overline{p}_2^{n-1} - \overline{p}_2^1, & \dots & \overline{p}_{n-1}^{n-1} - \overline{p}_{n-1}^1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Після побудови умовних байєсових множин $S_{\varphi_{k_0}|\varphi_k}$ байєсову множину $S_{\varphi_{k0}}$ визначають таким чином: $S_{\varphi_{k_0}} = \bigcap_{\varphi_k \in \Phi \setminus \varphi_{k_0}} S_{\varphi_{k_0}|\varphi_k}$.

Далі процес побудови байєсових множин виконують в аналогічній послідовності [1].

Приклад розв'язування задачі

Розглянемо задачу побудови байєсових множин для випадку наявності 3 можливих рішень: $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$, і 3 станів середовища: $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$, тобто коли $n=3$ і $m=3$. Припустимо, що оцінний функціонал задано такою матрицею:

		φ_1	φ_2	φ_3
p_1	θ_1	2	1	4
p_2	θ_2	5	2	3
$1-p_1-p_2$	θ_3	2	5	1

Запишемо байєсові значення функціонала для кожного з можливих рішень, а саме:

$$B^+(p,\varphi_1)=2p_1+5p_2+2(1-p_1-p_2)=3p_2+2,$$

$$B^+(p,\varphi_2)=1p_1+2p_2+5(1-p_1-p_2)=-4p_1-3p_2+5,$$

$$B^+(p,\varphi_3)=4p_1+3p_2+(1-p_1-p_2)=3p_1+2p_2+1.$$

Тепер складемо рівняння границь:

1) $\Gamma_{\varphi_1,\varphi_2}:\ B^+(p,\varphi_1)=B^+(p,\varphi_2),$

$$3p_2+2=-4p_1-3p_2+5,$$
$$6p_2=-4p_1-3,$$
$$p_2=-0,67p_1+0,5.$$

2) $\Gamma_{\varphi_1,\varphi_3}: B^+(p,\varphi_1)=B^+(p,\varphi_3),$

$$3p_2+2=3p_1+2p_2+1,$$
$$p_2=3p_1-1.$$

3) $\Gamma_{\varphi_2,\varphi_3}: B^+(p,\varphi_2)=B^+(p,\varphi_3),$

$$-4p_1-3p_2+5=3p_1+2p_2+1,$$
$$-5p_2=-4+7p_1,$$
$$p_2=-1,4p_1+0,8.$$

За результатами обчислень побудуємо на координатній площині отримані зображення границь (див. рис. 2.2).

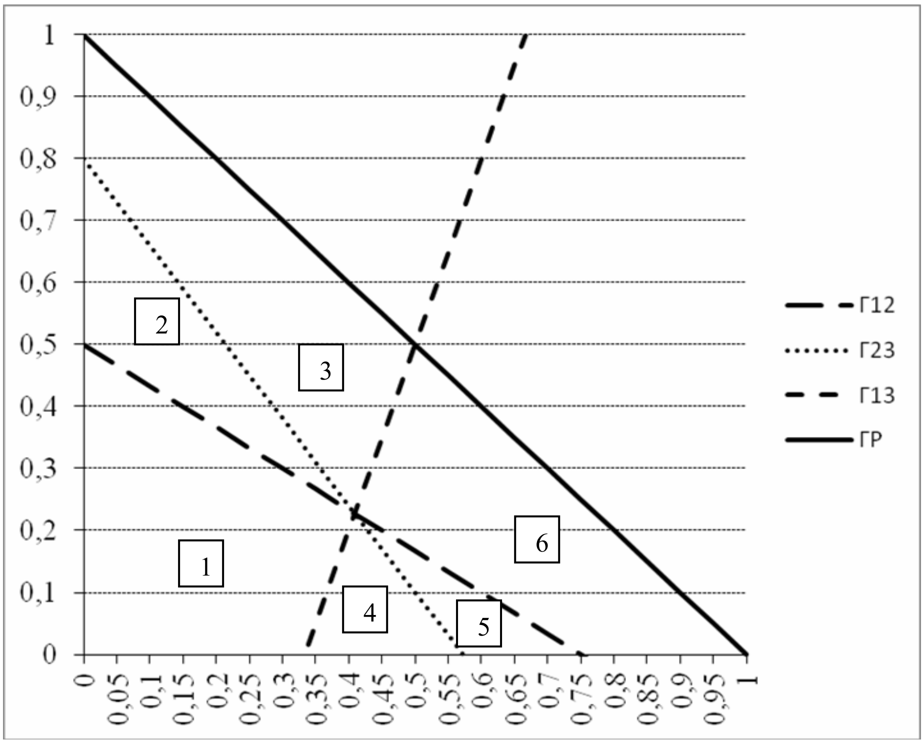

Рис. 2.2. Графічна інтерпертація границь підмножин

Як бачимо, вихідну область розбито на 6 підмножин. Визначимо тепер, яке з рішень є оптимальним для кожної з них. З цією метою в кожній підмножині виберемо довільну точку й обчислимо байєсові значення стосовно кожного з рішень у цій точці. Максимальне значення відповідатиме певній байєсовій множині. Результати розрахунків зведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Результати обчислення баєсових значень у кожній із підмножин

Підмножина	Координати точки		Байєсові значення			Максимальне значення	Належність до байєсової множини
	p_1	p_2	$B^+(p,\varphi_1)$	$B^+(p,\varphi_2)$	$B^+(p,\varphi_3)$		
1	0	0	2	5	1	5	S_{φ_2}
2	0	0,6	3,8	3,2	2,2	3,8	S_{φ_1}
3	0	0,9	4,7	2,3	2,8	4,7	S_{φ_1}
4	0,45	0	2	3,2	2,4	3,2	S_{φ_2}
5	0,65	0	2	2,4	3	3	S_{φ_3}
6	0,9	0	2	1,4	3,7	3,7	S_{φ_3}

Враховуючи отримані результати, остаточно одержуємо такі байєсові множини:

$$S_{\varphi_1} = \begin{cases} p_1 + p_2 \le 1, \\ p_2 \ge -0{,}67 p_1 + 0{,}5, \\ p_2 \ge 3 p_1 - 1, \\ p_1, p_2 \ge 0. \end{cases} \quad S_{\varphi_2} = \begin{cases} p_2 \le -0{,}67 p_1 + 0{,}5, \\ p_2 \le -1{,}4 p_1 + 0{,}8\,, \\ p_1, p_2 \ge 0. \end{cases} \quad S_{\varphi_3} = \begin{cases} p_1 + p_2 \le 1, \\ p_2 \ge -1{,}4 p_1 + 0{,}8\,, \\ p_2 \le 3 p_1 - 1, \\ p_1, p_2 \ge 0. \end{cases}$$

Графічне зображення отриманих байєсових множин показано на рис. 2.3.

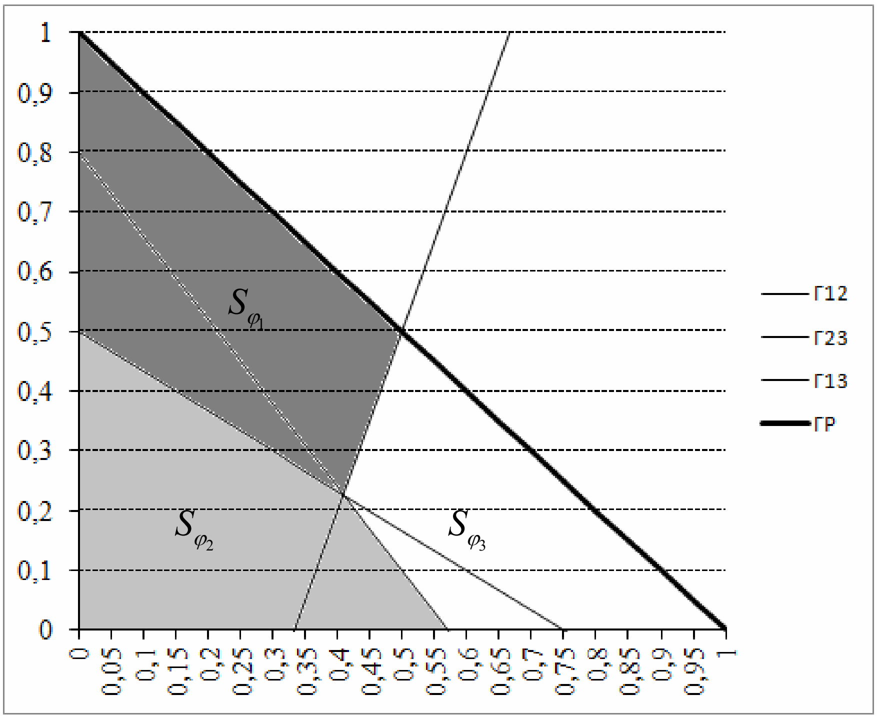

Рис. 2.3. Графічне подання байєсових множин

Розв'язування задачі методом варіації контрольної точки

Припустимо, що ситуацію прийняття рішень задано такою матрицею:

p		φ_1	φ_2	φ_3
0,3	θ_1	2	1	4
0,5	θ_2	5	2	3
0,2	θ_3	2	5	1

Контрольна точка $p_0 = (0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}2)$. Побудуємо байєсові множини, відповідно до описаної вище схеми.

1. Обчислимо байєсові значення оцінного функціонала в контрольній точці, а саме:

$$B^{+}(p_0, \varphi_1) = 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 2 = 3{,}5\,,$$

$B^+(p_0,\varphi_2)=0,3\cdot 1+0,5\cdot 2+0,2\cdot 5=2,3$,

$B^+(p_0,\varphi_3)=0,3\cdot 4+0,5\cdot 3+0,2\cdot 1=2,9$.

2. Знайдемо рішення φ_{k_0}, для якого

$$B^+(p_0,\varphi_{k_0})=\max_k B^+(p_0,\varphi_k)=3,9.$$

У нашому випадку $k_0=1$.

3. Для кожного рішення φ_k, окрім φ_{k_0} обчислюємо нев’язки таким чином:

$$\delta_{k_0k}=B(p_0,\varphi_{k_0})-B(p_0,\varphi_{k_0}),$$

тобто $\delta_{12}=1,2$, $\delta_{13}=0,6$, $\delta_{32}=0,6$.

4. Спочатку будемо визначати границю між множинами S_{φ_1} та S_{φ_2}, для цього обчислимо таку різницю:

$$d_{21}=\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}.$$

Розглянемо варіацію контрольної точки: $\bar{p}=p_0+q$, а саме:

$$\bar{p}_1=0,3+q_1,$$

$$\bar{p}_3=0,2+q_3,$$

$$\bar{p}_2=0,5+q_2.$$

Обчислимо скалярний добуток (d,q), тобто

$$(d,q)=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=q_1+3q_2-3q_3.$$

Запишемо рівність: $(d,q)=\delta_{12}=1,2$ і складемо систему рівнянь для знаходження першої варіації, а саме:

$$\begin{cases}q_1+3q_2-3q_3=1,2,\\ q_1=0,\\ q_1+q_2+q_3=0.\end{cases}$$

Розв'язавши її, маємо такі результати: $q_1 = 0;\ q_2 = 0,2;\ q_3 = -\,0,2$, тобто

$$p_0 + q = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \\ -0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А перша точка границі $\overline{p^1} = \left(0,3;\ 0,7;\ 0\right)$.

Обчислимо другу варіацію за такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} q_1 + 3q_2 - 3q_3 = 1,2, \\ q_2 = 0, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 0, \end{cases}$$

тоді $q_1 = 0,3;\ q_2 = 0;\ q_3 = -0,3$,

$$p_0 + q = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0 \\ -0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,5 \\ -0,1 \end{pmatrix},$$

а $\overline{p^2} = (0,6;\ 0,5;\ -0,1)$.

Рівняння прямої, яка проходить через ці дві точки, буде мати такий вигляд:

$$\frac{p_1 - 0,3}{0,6 - 0,3} = \frac{p_2 - 0,7}{0,5 - 0,7}.$$

Перетворимо його в канонічний вигляд, тобто

$$\begin{aligned} &\left(0,5 - 0,7\right)\left(p_1 - 0,3\right) = \left(p_2 - 0,7\right)\left(0,6 - 0,3\right), \\ &-0,2p_1 + 0,06 = 0,3p_2 + 0,21, \\ &0,3p_2 = -0,2p_1 + 0,15, \\ &p_2 = -0,67p_1 + 0,5. \end{aligned}$$

Таким чином, границя $\Gamma_{\varphi_1,\varphi_2}$ між множинами S_{φ_1} та S_{φ_2} описується таким рівнянням:

$$p_2 = -\,0,67p_1 + 0,5.$$

Аналогічно побудуємо границі між множинами S_{φ_2} і S_{φ_3}, та між S_{φ_1} і S_{φ_3}. Тепер отримуємо такі результати:

$$\Gamma_{\varphi_1,\varphi_3}: \ p_2 = 3p_1 - 1, \qquad \Gamma_{\varphi_2,\varphi_3}: \ p_2 = -1,4p_1 + 0,8.$$

Як бачимо, результати, отримані двома методами, однакові.

Контрольні питання

1. Дайте визначення байєсової множини.
2. Які властивості мають байєсові множини?
3. Із якою метою використовують байєсові множини?
4. Які методи застосовують для побудови байєсових множин?
5. У чому полягає геометричний метод побудови байєсових множин? Коли його можна застосовувати?
6. У чому полягає функціональний метод побудови байєсових множин? Коли його можна застосовувати?
7. У чому полягає метод варіації контрольної точки побудови байєсових множин?

Варіанти індивідуальних завдань

1.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,1	θ_1	1	5	7
0,4	θ_2	7	2	1
0,5	θ_3	4	1	3

2.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,4	θ_1	12	4	5
0,3	θ_2	10	6	12
0,3	θ_3	7	10	7

3.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,2	θ_1	1	0	3
0,5	θ_2	1	4	1
0,3	θ_3	5	1	1

4.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,2	θ_1	11	15	20
0,5	θ_2	17	3	14
0,3	θ_3	11	5	7

5.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,4	θ_1	3	1	3
0,2	θ_2	2	2	2
0,4	θ_3	1	4	5

6.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,1	θ_1	2	0	1
0,1	θ_2	1	2	3
0,8	θ_3	1	4	0

7.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,3	θ_1	13	4	2
0,4	θ_2	1	3	10
0,3	θ_3	12	14	6

8.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,7	θ_1	1	5	2
0,1	θ_2	7	6	1
0,2	θ_3	4	7	7

9.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,3	θ_1	6	12	4
0,5	θ_2	10	7	6
0,2	θ_3	4	8	10

10.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,1	θ_1	12	7	8
0,3	θ_2	5	11	12
0,6	θ_3	7	14	10

11.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,6	θ_1	3	5	3
0,2	θ_2	4	1	4
0,2	θ_3	2	4	8

12.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,5	θ_1	2	8	5
0,1	θ_2	8	12	7
0,4	θ_3	10	7	11

13.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,3	θ_1	21	15	10
0,5	θ_2	14	14	23
0,2	θ_3	10	11	12

14.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,2	θ_1	7	2	5
0,3	θ_2	3	2	6
0,5	θ_3	1	5	2

15.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,15	θ_1	1	5	3
0,25	θ_2	3	2	5
0,6	θ_3	5	1	4

16.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,3	θ_1	1	3	0
0,2	θ_2	0	2	2
0,5	θ_3	2	1	1

17.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,3	θ_1	2	0	1
0,25	θ_2	5	1	1
0,45	θ_3	1	6	4

18.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,2	θ_1	5	1	3
0,1	θ_2	2	3	4
0,7	θ_3	2	5	1

19.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,3	θ_1	0	5	1
0,1	θ_2	2	4	2
0,6	θ_3	3	0	7

20.

p_0		φ_1	φ_2	φ_3
0,5	θ_1	4	5	11
0,2	θ_2	12	7	8
0,3	θ_3	6	14	9

Примітка. Вибір варіанта завдання відбувається за номером прізвища студента в списку академічної групи.

Список літератури

1. Зайченко Ю. П. Исследование операций [Текст] / Ю. П. Зайченко. – К. : Вища шк., 1988. – 552 с.

2. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности [Текст] / Р. И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 168 с.

Світлана Альбертівна **Ус**

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

Методичні рекомендації
до виконання лабораторних робіт з дисципліни
“Теорія прийняття рішень”
студентами напряму підготовки
6.040303 Системний аналіз

Редактор О.Н. Ільченко

Підп. до друку 15.07.2014. Формат 30х42/4 .
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,0.
Обл.-вид. арк. 2,2. Тираж 20 пр. Зам. № .

ДВНЗ «Національний гірничий університет»
49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.